Διάλεξη 4η 29/10/2019

Παλινδρόμηση και Ανάλυση Διακύμανσης

Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση

• αγπ: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

εξαρτημένη ή απόκριση μτβ $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_p$: Παραμέτροι   σφάλματα

Μοντέλο Πολλαπλης Γραμμικης Παλινδρόμησης (πγπ) $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$.

ανεξάρτητες ή Επεξηγηματικές

Μορφή δεδομένων στο μοντέλο πγπ.

Πειραματικές Μονάδες	Y	X_1	X_2	...	X_p
1	Y_1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1p}
2	Y_2	X_{21}	X_{22}		X_{2p}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	Y_n	X_{n1}	X_{n2}		X_{np}

ο 1ος δείκτης παριστάνει την πειραματική μονάδα

Μια ισοδύναμη μορφή του πγπ

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Ισοδύναμη μορφή

$$\boxed{\underset{\sim}{Y} = X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}}$$

Αν ορίσω

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$n \times 1$ $\qquad$ $\underbrace{n \times (p+1) \text{ πίνακας}}_{\text{ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ}}$ $\qquad$ $(p+1) \times 1$ $\qquad$ $n \times 1$

Άρα

$$\underset{n \times 1}{\underset{\sim}{Y}} = \underset{n \times (p+1)}{X} \underset{(p+1) \times 1}{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{n \times 1}{\underset{\sim}{\varepsilon}}$$

Εκτιμητές Ελαχίστων Τετραγώνων (ΕΕΤ) $\underset{\sim}{\beta}$.

ΕΕΤ : Είναι εκείνοι που ελαχιστοποιούν τα σφάλματα του μοντέλου ή που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετρ των σφαλμάτων.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \overset{\text{ανάστροφο}}{\underset{\sim}{\varepsilon}'} \underset{\sim}{\varepsilon} = (Y - X\underset{\sim}{\beta})'(Y - X\underset{\sim}{\beta})$$

$$= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}$$

Το $\underset{n \times 1}{\underset{\sim}{Y}'} \underset{n \times (p+1)}{X} \underset{(p+1) \times 1}{\underset{\sim}{\beta}}$: είναι αριθμός $\Rightarrow \underset{\sim}{Y}'X\underset{\sim}{\beta} = (\underset{\sim}{Y}'X\underset{\sim}{\beta})' = \underset{\sim}{\beta}'X'Y$

$$\Rightarrow \boxed{S = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\beta'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta}}$$

Άρα οι ΕΕΤ θα προκύψουν από την επίλυση ως προς $\underset{\sim}{\beta}$ του συστήματος

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S = \underset{\sim}{0} \quad \text{ή} \quad \nabla_{\underset{\sim}{\beta}} S = 0 \quad \text{με} \quad \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}, \ldots \frac{\partial}{\partial \beta_p} \right)$$

Ισχύει $\dfrac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{\alpha}$ ①

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(\underset{\sim}{\beta}'A\underset{\sim}{\beta}) = 2A\underset{\sim}{\beta} \quad ②$$

Σύμφωνα με ① και ② προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(Y'Y) - 2\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(\underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y}) + \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}}(\underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta})$$

$$\begin{matrix}①\\②\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S = \underset{\sim}{0} \Rightarrow -2X'\underset{\sim}{Y} + 2X'X\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}$$

$$(\eta) \quad \underbrace{X'X\underset{\sim}{\beta} = X'Y}_{\text{ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ}} \leftarrow \text{Σύστημα } p+1 \text{ εξισώσεων με } p+1 \text{ αγνώστους}$$

Αν $\exists$ ο αντίστροφος μπορώ να το λύσω

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $\exists$ ο $(X'X)^{-1}$ και η μοναδική λύση είναι $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ : Οι ΕΕΤ είναι $\boxed{\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}}$

Εκτιμώμενο μοντέλο : $\hat{\underset{\sim}{Y}} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

Υπόλοιπα : $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}}$.

Παρατήρηση : Οι ΕΕΤ παρήχθησαν με την υπόθεση ότι $\exists$ ο αντίστροφος $(X'X)^{-1}$

Ένα μοντέλο για το οποίο $\exists$ ο $(X'X)^{-1}$ λέγεται μοντέλο πλήρους βαθμίδας

Αν $\nexists$ ο $(X'X)^{-1}$ το μοντέλο είναι μη πλήρους βαθμού οι ΕΕΤ δεν είναι μοναδικοί και δίνονται

από τη σχέση $\bar{\beta} = (X'X)^{-} X' \underset{\sim}{Y}$

όπου $(X'X)^{-}$ ένας γενικευμένος αντίστροφος του $(X'X)$ δηλ. τ.ω $(X'X)(X'X)^{-}(X'X) = X'X$.

Υποθέσεις για τα σφάλματα.

① $E(\varepsilon_i) = 0 \longrightarrow$ ① $E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{0}$

② $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ $i = 1, \dots, n$ $\xrightarrow{\text{Ισοδύναμα}}$ ② $Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}$

Μορφή Υποθέσεων που στηρίζονται στο $\underset{\sim}{\varepsilon}$.

③ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ $i \neq j$ $\longrightarrow$ –//– $= \sigma^2 I_n$

④ $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ $\longrightarrow$ ③ $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$

Θυμίζουμε:

Αν $\underset{\sim}{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ είναι τυχαίο διάνυσμα

τότε η μέση τιμή $\underset{\sim}{W}$ είναι

$$E(\underset{\sim}{W}) = \begin{pmatrix} E(w_1) \\ E(w_2) \\ \vdots \\ E(w_n) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων του τδ $\underset{\sim}{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ συμβολίζεται με $Var(\underset{\sim}{W})$ ή Σ

$$Var(\underset{\sim}{W}) = \Sigma = \begin{pmatrix} Var(W_1) & & & Cov(W_i, W_j) \\ & Var(W_2) & & \\ & & \ddots & \\ Cov(W_j, W_i) & & & Var(W_n) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

όπου $Cov(W_i, W_j) = E(W_i W_j) - (EW_i)(EW_j)$

επειδή η Cov είναι συμμετρική

ο $Var(\underset{\sim}{W})$ πάντα συμμετρικός

Ο $Var(\underset{\sim}{W}) \geq 0$ (θετικά ημιορισμένος)

Συνέπεια των Υποθέσεων στο $\underset{\sim}{Y}$

$\rightarrow$ ① $E(\underset{\sim}{Y}) = E(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}) = X\underset{\sim}{\beta} + E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = X\underset{\sim}{\beta}$

$\rightarrow$ ② $Var(\underset{\sim}{Y}) = Var(X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}) = Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n$

$\rightarrow$ ③ Επειδή το $Y = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ γραμμικός μετασχ του κανονικού $\underset{\sim}{\varepsilon}$

$Y \sim N_n(X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 I_n)$

Ιδιότητες των ΕΕΤ $\hat{\beta}$.

① Οι ΕΕΤ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{Y}$ (αντίστροφος) είναι αμερόληπτη της παραμέτρου β

δηλ. $E(\hat{\beta}) = \beta$

Απ

$$E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{Y}\right]$$

$$= (X'X)^{-1} X' E(\underset{\sim}{Y})$$

$$\underset{E(Y)=X\beta}{=} (X'X)^{-1} X' X \beta$$

$$= I_{p+1} \beta$$

$$= \beta$$

② $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

Απ

$$Var(\hat{\beta}) = Var\Big[\overbrace{(X'X)^{-1} X'}^{A} \underset{\sim}{Y}\Big]$$

Από ΘΠΣ: Ισχύει $Var(A\underset{\sim}{W}) = A\, Var(\underset{\sim}{W})\, A'$

$$Var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X' \, Var(\underset{\sim}{Y}) \left[(X'X)^{-1} X'\right]'$$

$$\underset{\substack{(AB)'=B'A' \\ (A^{-1})'=(A')^{-1}}}{=} (X'X)^{-1} X' \left[\sigma^2 I_n\right] X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{(X'X)^{-1} X'X}_{I} (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

③ Αν $\underset{\sim}{X_0} = (1, X_{01}, \ldots X_{0p})'$ μια δεδομένη τιμή των ανεξάρτητων μεταβλητών και $\hat{Y}_0 = \underset{\sim}{X_0}' \hat{\beta}$ η προβλεπόμενη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y τότε

$$Var(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \underset{\sim}{X_0}' (X'X)^{-1} \underset{\sim}{X_0}$$

Απ

$$\left.\begin{aligned}
&Var(\hat{y}_0) = Var(\underset{\sim}{x}_0' \hat{\underset{\sim}{\beta}}) \\
&\text{Ισχύει} \quad Var(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{a}'Var(w)\underset{\sim}{a}
\end{aligned}\right\}$$

$$Var(\hat{y}_0) = \underset{\sim}{x}_0' Var(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \underset{\sim}{x}_0$$

$$= \underset{\sim}{x}_0' \left[\sigma^2 (x'x)^{-1}\right] \underset{\sim}{x}_0$$

$$= \sigma^2 \underset{\sim}{x}_0' (x'x)^{-1} \underset{\sim}{x}_0 \quad \square$$

(4) Ανάλυση Ολικής Μεταβλητότητας στην πγπ - Πίνακας ΑΝΑΔΙΑ

$$SStot = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\bar{y}\sum_{i=1}^{n} y_i + n\bar{y}^2$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\bar{y}n\bar{y} + n\bar{y}^2$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - n\bar{y}^2.$$

$$\Rightarrow \boxed{SStot = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - n\bar{y}^2} \quad (1)$$

$$SSres = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}})'(\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}}) = (\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - (\underset{\sim}{y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}})' - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

Αλλά

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}' X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

$$= \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}$$

Άρα $SSres = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}$$

$$\boxed{SSres = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}} \quad (2)$$

$$SSreg = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^2 + n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i$$

$$= \hat{\underset{\sim}{y}}'\hat{\underset{\sim}{y}} + n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i$$

$$= (X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'(X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) + n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i$$

$$\Rightarrow SSreg = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} + n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i$$

$$= \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} - n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i$$

$$\boxed{SSreg = \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + n\bar{y}^2 - 2\bar{y}\sum\hat{y}_i} \quad (3)$$

Από κανονικές εξισώσεις : $X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$

$$\Rightarrow X'\underset{\sim}{y} - X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow X'(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'X = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}})'X = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow \left(y_1-\hat{y}_1,\ y_2-\hat{y}_2,\ \dots,\ y_n-\hat{y}_n\right)\begin{pmatrix}1 & x_{11} & \dots & x_{1p}\\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p}\\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (y_1-\hat{y}_1)+(y_2-\hat{y}_2)+\dots+(y_n-\hat{y}_n)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=0$$

$$\Rightarrow n\bar{y}-\sum\hat{y}_i=0 \Longrightarrow \boxed{\sum\hat{y}_i=n\bar{y}} \quad (4)$$

Από (3), (4)

$$SSreg=\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}+n\bar{y}^2-2\bar{y}(n\bar{y})$$

$$=\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}+n\bar{y}^2-2n\bar{y}^2$$

$$=\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}-n\bar{y}^2$$

$$\boxed{SSreg=\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{y}-n\bar{y}^2} \quad (5)$$

Απο (1), (2), (5) βγήκαν όλα.

$$SStot=SSreg+SSres$$

↳υπόλοιπα

Αν SSreg >> SSres υποσχόμενο μοντέλο.

Πίνακας ΑΝΑΔΙΑ στο μοντέλο πγπ.

Πηγή μεταβλητότητας	SS	β.ε	MS	F-πηλίκο
Μοντέλο πγπ	SS_{reg}	$(p+1)-1 = p$	$MS_{reg} = \frac{SS_{reg}}{p}$	$F = \frac{MS_{reg}}{MS_{reg}}$
Υπόλοιπα	SS_{res}	$(n-1)-p = n-p-1$	$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-p-1}$	
Ολική	SS_{tot}	$n-1$		

5 $E(MS_{res}) = \sigma^2$

Συντελεστής προσδιορισμού

6 $R^2 = \frac{SS_{reg}}{SS_{tot}} = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$

Καθαρός αριθμός

$0 \leq R^2 \leq 1$

$R^2\text{-adjusted} = \frac{MS_{res}}{MS_{tot}}$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για το μοντέλο της αγπ αν ισχύουν οι υποθέσεις για τα σφάλματα. Το $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \bar{X}\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}\right)$

$$= \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

Το $\hat{\beta}_0$ είναι γραμμικός συνδιασμός του $\bar{Y}$ που ακολουθεί κανονική και του $\hat{\beta}_1$ που ακολουθεί κανονική

Ισχύει : Γραμμικός συνδιασμός κανονικών ακολουθεί κανονική

Άρα $\hat{\beta}_0 \sim Normal$

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\bar{Y} - \bar{X}\hat{\beta}_1) = E(\bar{Y}) - \bar{X}E(\hat{\beta}_1) = E(\bar{Y}) - \bar{X}\beta_1 \quad (1)$$

- $E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(Y_i) \overset{E(Y_i)=\beta_0+\beta_1 X_i}{=\!=\!=}$

$$= \frac{1}{n}\sum(\beta_0 + \beta_1 X_i) = \frac{1}{n}\left(n\beta_0 + \beta_1 \sum X_i\right) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n}\sum X_i$$
$$= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{n}\sum X_i$$
$$= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} \quad (2)$$

Από (1) κ (2) $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 + \beta_1\bar{X} - \bar{X}\beta_1 \Rightarrow \boxed{E(\hat{\beta}_0) = \beta_0}$

$$\left.\begin{aligned} &Var(\hat{\beta}_0) = Var(\bar{Y} - \bar{X}\hat{\beta}_1) \\ &Var\left(\sum a_i W_i\right) = \sum a_i^2 Var(W_i) + \sum_i^{\wedge}\sum_j a_i a_i Cov(W_i, W_j) \end{aligned}\right\}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var(\bar{Y}) + \bar{X}^2 Var\hat{\beta}_1 - \bar{X}\,Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)$$

Αποδείξαμε ότι $Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = 0$ άρα

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var(\bar{Y}) + \bar{X}^2 Var\hat{\beta}_1 = Var(\bar{Y}) + \bar{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

γι ασυσχ.

$$\bullet\ Var(\bar{y}) = \frac{1}{n^2} \Sigma Var(y_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \Sigma \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Οπότε $Var(\hat{\beta_0}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 \bar{X}^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$

$$= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \right\}$$